

Algèbre 2 : Exercices

Correction

Ex 5

Lemme Démontrer que pour tout $x \in G$, sous les hypothèses de l'exercice, $x * x = x$ implique $x = e$.

Soit $x \in G$ tel que $x * x = x$

$$\text{or } x' * x = e$$

d'autre part, $(x' * x) * x = x' * (x * x)$ par associativité
comme $x * x = x$ par hypothèse on déduit que

$$e * x = x' * x$$

$$\text{mais } x' * x = e$$

$$\text{et } e * x = x$$

$$\text{d'où } x = e$$

$$\begin{aligned} \bullet (x * x') * (x * x') &= x * (x' * x) * x' \text{ par associativité} \\ &= x * e * x' \text{ car } x' * x = e \\ &= x * x' \end{aligned}$$

donc d'après le lemme, on obtient $x * x' = e$

On vient de montrer que $\forall x \in G, \exists x' \in G$ tel que $x' * x = x * x' = e$.