Version 0.7 du 08/10/14

0.1 Convergence

0.1.1 Théorèmes de convergence

Suites de Cauchy

Question : est-il possible de savoir si une suite converge sans connaître sa limite ? L'idée intuitive est que les termes d'une suite convergente doivent être proches les uns des autres à partir d'un certain rang. C'est la notion de suite de Cauchy qui se formalise de la manière suivante.

Définition Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (U_n) est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ les distances entre les termes U_n et U_{n+k} sont inférieures à ε à partir d'un certain rang.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |U_n - U_{n+k}| < \varepsilon$$

Théorème Si une suite de réels converge alors c'est une suite de Cauchy.

Démonstration

$$|U_n - U_{n+k}| = |U_n - l + l - U_{n+k}| \leq |U_n - l| + |l - U_{n+k}|$$

On fixe $\varepsilon > 0$ alors

$$\exists n_0, n > n_0 \implies |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \, et \, |l - U_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2} \implies |U_n - U_{n+k}| < \varepsilon$$

Critère pratique Pour montrer que (U_n) est de Cauchy, il suffit de trouver (V_n) convergent vers 0 telle que, à partir d'un certain rang (indépendant de k), pour tout k, on a : $|U_n - U_{n+k}| \leq V_n$

Théorème Dans $\mathbb{R}$ toute suite de Cauchy converge.

Ce n'est pas le cas dans $\mathbb{Q}$ où par exemple la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge vers e qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Suites adjacentes

Définition Les suites $((U_n), (V_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si :

1. (Un) est croissante et (V_n) est décroissante
2. Pour tout $n \geq 0$, on a $U_n \geq V_n$
3. $\lim_{n \to +\infty}(V_n - U_n) = 0$

Remarque Les termes sont ordonnés $U_0 \leq U_1 \leq ... \leq U_n \leq ... \leq V_n \leq .. \leq V_1 \leq V_0$.

Théorème Si les suites $((U_n),(V_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont adjacentes elles convergent vers la même limite.

Démonstration (U_n) croissante et majorée par V_0, donc elle converge vers l.
(V_n) décroissante et minorée par U_0, donc elle converge vers l'.
Donc $l - l' = \lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0 \implies l = l'$

Suites adjacentes

Définition Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. Une suite extraite ou sous suite est de la forme $(U_{\varphi(n)})$.

Théorème Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, si $lim_{n\to+\infty} U_n = l$ alors pour toute suite extraite on a $lim_{n\to+\infty} U_{\varphi(n)} = l$

Démonstration Voir que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) > n$ (la démonstration se fait par récurrence).

Corollaire Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si elle admet une sous suite divergente ou deux sous suites qui convergent vers des limites distinctes alors elle diverge.

Exemple :
soit $(U_n) = -1^n$
$\varphi_1 : n \mapsto 2n$
$\varphi_2 : n \mapsto 2n+1$
alors $(U_{\varphi_1(n)})$ converge vers 1 et $(U_{\varphi_2(n)})$ converge vers -1 et (U_n) est divergente.

0.1.2 Relations de comparaison

Définitions et notations

Définitions Soit $((U_n),(V_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

(U_n) est dominée par (V_n) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{R}, |U_n| < M\,|V_n|$$

On note $(U_n) = O(V_n)$ (on prononce (U_n) est un grand O de (V_n)).

(U_n) est négligeable devant (V_n) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |U_n| < \varepsilon\,|V_n|$$

On note $(U_n) = o(V_n)$ (on prononce (U_n) est un petit o de (V_n)).

(U_n) est équivalente à (V_n) si $(U_n - V_n)$ est négligeable devant V_n.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |U_n - V_n| < \varepsilon\,|V_n|$$

On note $(U_n) \sim (V_n)$ (on prononce (U_n) est équivalente à (V_n)).

Equivalence et limites

Théorème Soit $((U_n),(V_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $(U_n) \sim (V_n)$ et si $lim_{n\to+\infty} U_n = l$ alors $lim_{n\to+\infty} V_n = l$. Si (U_n) n'admet pas de limite alors V_n n'admet pas non plus.

Démonstration Idem que pour les suites extraites, voir que $\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$ et (U_n) converge vers l. Donc $lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = lim_{n\to+\infty}(U_n) = l$.

En pratique Pour étudier le comportement d'un suite, on tente de lui trouver une suite équivalente plus simple.

Equivalence et comparaison

Propriétés Soit $((U_n),(U'_n),(V_n),(V'_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $(U_n) \sim (U'_n)$ et $(V_n) \sim (V'_n)$ alors :

1. si $(U'_n) \sim (V'_n)$ alors $(U_n) \sim (V_n)$
2. si $(U'_n) = O(V'_n)$ alors $(U_n) = O(V_n)$
3. si $(U'_n) = o(V'_n)$ alors $(U_n) = o(V_n)$

Sommes et suites négligeables

Proposition 1 Soit $((U_n),(V_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si $(V_n) = o(U_n)$, alors $(U_n) + (V_n) \sim (U_n)$.
(une suite + une suite négligeable = une suite équivalente).
Exemple : $(2^{3n}) + (3^{2n}) \sim (3^{2n})\, car (8^n) = o(9^n)$

Démonstration Idée de preuve : $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (V_n) = \varepsilon(U_n) \implies (U_n) - (V_n) = (U_n) - \varepsilon(U_n) = (U_n)$

Proposition 2 Soit $((W_n),(V_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites négligeables devant $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alors $(W_n) + (V_n) = o(U_n)$

Plus généralement, la somme d'un nombre fini de suites négligeables devant (U_n) reste négligeable devant (U_n).

Exemple : $(\frac{1}{n^2}) = o(\frac{1}{n}) \implies (\frac{3}{n^2}) = o(\frac{1}{n})$

Equivalence des produits

Proposition Soit $((U_n),(U'_n),(V_n),(V'_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $(U_n) \sim (U'_n)$ et $(V_n) \sim (V'_n)$ alors $(U_n V_n) \sim (U'_n V'_n)$
2. Si $(U_n) = O(U'_n)$ et $(V_n) = O(V'_n)$ alors $(U_n V_n) = O(U'_n V'_n)$
3. Si $(U_n) = O(U'_n)$ et $(V_n) = o(V'_n)$ alors $(U_n V_n) = o(U'_n V'_n)$
4. Si $(U_n) = o(U'_n)$ et $(V_n) = o(V'_n)$ alors $(U_n V_n) = o(U'_n V'_n)$

Remarque Ces quatres formules sont généralisables aux puissance (démonstration par récurrence).

Conclusion Les comparaisons se comportent bien lorsqu'on effectue un produit de suites car les comparaisons sont définies à l'aide de produits de suites.

Equivalence des somme

Attention : Les suites équivalentes ne s'additionnent pas ! ! !
Exemple : Soit $((U_n), (U'_n), (V_n), (V'_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
$(U_n) = \frac{1}{n} \sim (U'_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ et $(V_n) = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n} \sim (V'_n) = \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n}$ mais attention $(U_n + V_n) = \frac{1}{n^3}$ n'est pas équivalent à $(U'_n + V'_n) = \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}$

Equivalence de référence

Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $Un \to 0$ alors

1. $sin(U_n) \sim U_n$
2. $e^{U_n} - 1 \sim U_n$
3. $ln(1 + U_n) \sim U_n$ ou $(ln(V_n) \sim V_n - 1$ si $V_n \to 1)$
4. $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1 + U_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha U_n$

"o" de référence

Soit $(\alpha, \beta, q) \in \mathbb{R}^3$ avec $|q| > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ alors pour "n suffisament grand" :

1. $((ln(n))^{\alpha}) = o(n^{\beta})$
2. $(n^{\beta}) = o(q^n)$
3. $(q^n) = o(n!)$
4. $(n!) = o(n^n)$