Université de Rennes I — **Licence de Mathématiques**

Géométrie affine (D05) — **Janvier 2006**

Examen - 1ère session - 2heures

Les documents, ordinateurs, téléphones et calculatrices sont interdits.

I (5pts)

1 Définition d'une application affine.

2 Caractérisation des homothéties et translations.

3 Définition des coordonnées barycentriques.

4 Définition et exemple d'une transvection.

II (2pts) Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathbf{R}^3$ qui ne contient pas l'origine. Montrer que $\mathcal{P}$ contient les points $p=(2,1,0)$ et $q=(3,0,1)$ si et seulement s'il existe $t\in\mathbf{R}$ tel que $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : tx-(1+2t)y-(1+3t)z+1=0\}$.

III (7pts)

1 Montrer que les projections de $\mathbf{R}^3$ dans $\{z=0\}$ sont les applications affines de la forme $\mathcal{A}(x,y,z)=(x+uz,y+vz,0)$ où $u,v\in\mathbf{R}$.

2 Montrer que les symétries de $\mathbf{R}^3$ par rapport à $\{z=0\}$ sont les applications affines de la forme $\mathcal{A}(x,y,z)=(x+uz,y+vz,-z)$ où $u,v\in\mathbf{R}$.

3 Montrer que les affinités de base $\{z=0\}\subset\mathbf{R}^3$ et différentes de l'identités sont les applications affines de la forme $\mathcal{A}(x,y,z)=(x+uz,y+vz,wz)$ où $u,v,w\in\mathbf{R}$ avec $w\neq 1$.

4 Montrer que les automorphismes affines de $\mathbf{R}^3$ qui fixent point par point le plan $\{z=0\}$ sont les applications affines de la forme $\mathcal{A}(x,y,z)=(x+uz,y+vz,wz)$ où $u,v,w\in\mathbf{R},\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$.

5 Montrer que l'ensemble G des automorphismes affines de $\mathbf{R}^3$ qui fixent point par point le plan $\{z=0\}$ est un sous-groupe du groupe affine.

6 Montrer que tout élément de G est la composée d'au plus deux affinités de base $\{z=0\}$.

7 Reconnaître les éléments de G qui ne sont pas des affinités.

IV (4pts) On considère les deux plans affines de $\mathbf{R}^3$ définis par $P_1=\{x+2y+3z=1\}$ et $P_2=\{x+2y+3z=2\}$ ainsi que le point $m=(1,1,1)$.

1 Montrer que P_1 et P_2 sont parallèles et qu'ils ne contiennent pas m.

2 Montrer que si $p_1\in P_1$ alors la droite mp_1 coupe le plan P_2 en un unique point p_2.

3 Montrer que l'application $h : P_1\to P_2$ qui à $p_1\in P_1$ associe l'unique point de mp_1 que contient P_2 est un isomorphisme affine.

4 Montrer que h s'étend en une homothétie H de $\mathbf{R}^3$ dont on précisera le centre et le rapport.

V (2pts) Dessiner quatre points qui ne forment pas un parallélogramme et construire à la règle et au compas l'isobarycentre de ces quatre points.