9 Espaces affines

La définition d'espace affine formalise ce que l'on connaît déjà sur le plan ou l'espace usuels : étant donnés un vecteur $\vec{v}$ et un point A du plan il existe un unique point B du plan tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Voyons plus précisement comment :

Définition 9.1. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou sur tout autre corps comme $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier). Un "espace affine d'espace vectoriel associé V" est un ensemble $\mathscr{E}$ dont les éléments sont appélés "points" muni d'une application θ : $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to V$ notée $\theta(A, B) = \overrightarrow{AB}$ telle que :*

1. *$\forall A \in \mathscr{E}$ l'application $\theta_A : \mathscr{E} \to V$ définie par $\theta_A(B) := \overrightarrow{AB}$ est une bijection ;*
2. *$\forall A, B, C \in \mathscr{E}$ on a la suivante "relation de Chasles" : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.*

(On dit aussi que $\mathscr{E}$ est dirigé par V, ou bien que V est l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathscr{E}$ ou que $\mathscr{E}$ est modélé sur V.) La dimension de $\mathscr{E}$ est la dimension de V (et notamment si elle est 1 on dit que $\mathscr{E}$ est une droite affine, si elle est 2 $\mathscr{E}$ est un plan affine, si elle est 3 on dit que $\mathscr{E}$ est un espace affine). Parfois on note le point $\theta_A^{-1}(\vec{v})$ par $A + \vec{v}$ (par la règle de Chasles, on a que $(A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w})$).

$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Exercice 87. *Prouver que :*

$$\forall A, B \in \mathscr{E} \qquad \overrightarrow{AA} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

Puis vérifier que si $A', B' \in \mathscr{E}$ sont deux points tels que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ (règle du parallélogramme).
$\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B}$

Exercice 88. *Vérifier que si V est un espace vectoriel, alors il a aussi une structure naturelle d'espace affine dirigée par V, donnée par $\theta(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{w} - \vec{v}$.* inj : $\theta_{\vec v}(\vec w) = \theta_{\vec v}(\vec u) \Rightarrow \vec w = \vec u$; $\forall \vec u\ \exists \vec w\ \theta_v(\vec w) = \vec u$ ($\vec w = \vec u + \vec v$) donc surj.
Chasles : $\theta(\vec v, \vec w) + \theta(\vec w, \vec u) = \vec w - \vec v + \vec u - \vec w = \theta(\vec v, \vec u)$

Exercice 89. *Si $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ sont deux espaces affines (dirigés) réspectivement ~~par~~ les espaces vectoriels V_1 et V_2 alors aussi $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$ peut être muni de la structure d'espace affine sur l'espace vectoriel $V_1 \oplus V_2$. Donner cette structure (i.e. expliciter θ en fonction des θ_i, $i = 1, 2$).* $\theta(A, B) = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} = \theta_1(A_1, B_1) + \theta_2(A_2, B_2)$

De façon informelle on peut penser qu'un espace affine est "un espace vectoriel où on ne sait pas où est l'origine". Plus précisement, on peut rendre un espace affine $\mathscr{E}$ un espace vectoriel en fixant un point $A \in \mathscr{E}$ quelconque comme origine : on utilise la bijection $\theta_A : \mathscr{E} \to V$ pour définir une structure d'espace vectoriel sur E (on appelle parfois le vectorialisé de $\mathscr{E}$ en A). Mais cette structure n'est pas du tout canonique car elle dépend du choix de A qui devient ainsi l'origine !

Exercice 90. *Prouver que si $\mathscr{E}_A$ est l'espace vectoriel associé à $\mathscr{E}$ en le vectorialisant en un point A alors $P + Q = M$ ssi $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM}$ et que de façon similaire $\lambda M = N$ ssi $\lambda \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$.*

Définition 9.2 (Sous espaces affines). *Un sous espace affine $\mathscr{F}$ d'un espace affine $\mathscr{E}$ est un sous-ensemble $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ tel qu'il existe $A \in \mathscr{F}$ tel que la restriction de θ_A à $\mathscr{F}$ est une bijection entre $\mathscr{F}$ et un sous-espace vectoriel F de V. Dans ce cas on appelle dimension de $\mathscr{F}$ la dimension de F et on dit que F "dirige $\mathscr{F}$". On vérifie que $\forall B \in \mathscr{F}$ on a que θ_B est une bijection entre $\mathscr{F}$ et F. Réciproquement si $F \subset V$ est un sous-espace vectoriel de V et $A \in \mathscr{E}$, on appelle le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ par A dirigé par F l'ensemble $\mathscr{F} := \{B \in \mathscr{E} | \overrightarrow{AB} \in F\}$; il s'agit d'un sous-espace affine dirigé par F. En particulier une droite affine est un sous-espace affine de dimension 1 et un plan affine en est un de dimension 2.*

Exercice 91. *Soient V, W deux espaces vectoriels, vu comme espaces affines dirigés par eux mêmes, via l'application $\theta_V(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} - \vec{x}$ et $\theta_W(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} - \vec{x}$. Montrer que si $f : V \to W$ est une application linéaire et $\vec{w} \in W$ alors $f^{-1}(\vec{w})$ est un sous-espace affine de V.*

Exercice 92. *Soit V un espace vectoriel, vu comme espace affine dirigé par V, via l'application $\theta_V(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} - \vec{x}$. Montrer que les sous-espaces vectoriels sont les espaces affines qui contiennent $\vec{0}$.*