Démonstration. Puisque la partie linéaire de $H_{O,\lambda}$ est $\lambda Id : V \to V$ si $\vec{v}$ dirige r alors $\lambda\vec{v}$ dirige $H_{O,\lambda}(r)$ et donc les deux droites sont manifestement parallèles. Il est aussi clair que si $O \in r$ alors $H_{O,\lambda}(r) = r$. Réciproquement si $H_{O,\lambda}(r) = r$ alors si $P \in r$ on a $H_{O,\lambda}(P) = P'$ avec $\overrightarrow{OP'} = \lambda OP$ et $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'}$; puisque $\overrightarrow{PP'}$ dirige r ona aussi que $(\lambda - 1)\overrightarrow{OP}$ dirige r et donc si $\lambda \neq 1$ que $\overrightarrow{OP}$ dirige r et $O \in r$. Enfin si $\lambda = 1$ alors $H_{O,\lambda} = Id_{\mathcal{E}}$ et donc l'énoncé est évident. $\boxed{9.12}$

Théorème 9.13 (Théorème de Thalès). *Soient r et r' deux droites distinctes d'un plan affine et et soient s_1, s_2 deux droites qui s'intersectent en un point $O \notin r \cup r'$ et qui ne sont parallèles ni à r ni à r'. Alors si $A_i = s_i \cap r, i = 1,2$ et $B_i = s_i \cap r'$ on a $\frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OB_1}} = \frac{\overrightarrow{OA_2}}{\overrightarrow{OB_2}} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{B_1B_2}}$ si et seulement si $r // r'$.*

Démonstration. Soit $\lambda = \frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OB_1}}$ (les deux vecteurs sont colinéaires donc il existe un tel λ !). Alors l'homothètie $H_{O,\lambda}$ transforme (par construction) $H_{O,\lambda}(O) = O, H_{O,\lambda}(B_1) = A_1, H_{O,\lambda}(s_i) = s_i, i = 1,2$ et encore $H_{O,\lambda}(r')$ est la droite parallèle à r' passant par A_1. Mais alors si $r // r'$ on a que $H_{O,\lambda}(B_1 + \overrightarrow{B_1B_2}) = A_1 + \lambda\overrightarrow{B_1B_2}$ (et donc $H_{O,\lambda}(B_2) \in r$) et encore $H_{O,\lambda}(B_2) = H_{O,\lambda}(O + \overrightarrow{OB_2}) = O + \lambda\overrightarrow{OB_2}$ (et donc $H_{O,\lambda}(B_2) \in s_2$) mais alors $H_{O,\lambda}(B_2) = s_2 \cap r = A_2$ et la thèse suit. Réciproquement si $\frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OB_1}} = \frac{\overrightarrow{OA_2}}{\overrightarrow{OB_2}} = \lambda$ alors $H_{o,\lambda}(r') = r$ et ces droites sont parallèles car l'une est l'image de l'autre par une homothétie. $\boxed{9.13}$

Théorème 9.14 (de Désargues). *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles dans un plan affine tels que $AB // A'B'$, $AC // A'C'$ et $BC // B'C'$. Alors les droites AA', BB' et CC' sont soit parallèles soit concourantes.*

Démonstration. Si les droites sont parallèles il n'y a rien à prouver. Supposons autrement que $AA' \cap BB' = O$ et soit $\lambda = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA'}}$ (il existe car ces vecteurs sont colinéaires !). Alors l'homothétie $H_{O,\lambda}$ est telle que $H_{O,\lambda}(O) = O, H_{O,\lambda}(A) = A'$ et elle transforme la droite AB en une droite dirigée par $\lambda\overrightarrow{AB}$ et passant par A' donc en la droite $A'B'$; de façon similaire elle transforme la droite AC en celle $A'C'$. Mais alors $H_{O,\lambda}(B) = H_{O,\lambda}(OB \cap AB) = A'B' \cap OB = B'$ et $H_{O,\lambda}$ transforme la droite BC en la droite dirigée par $\lambda\overrightarrow{BC}$ passant par B' donc $B'C'$. Mais alors on a aussi $H_{O,\lambda}(C) = C'$. $\boxed{9.14}$

Théorème 9.15 (de Ceva). *Soit ABC un triangle dans le plan affine. et soient $A' \in BC$, $B' \in AC$ et $C' \in AB$ trois points. Alors on a $\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} = -1$ ssi $AA' \cap BB' \cap CC' \neq \emptyset$ ou bien $AA' // BB' // CC'$.*

Démonstration. Supposons $AA' \cap BB' \cap CC' = M$ et soit $M = \alpha A + \beta B + \gamma C$ avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Alors la droite AM intersecte BC en $A' = \frac{\beta}{1-\alpha}B + \frac{\gamma}{1-\alpha}C$ et de façon similaire $B' = \frac{\alpha}{1-\beta}A + \frac{\gamma}{1-\beta}C$ et enfin $C' = \frac{\beta}{1-\gamma}B + \frac{\alpha}{1-\gamma}A$. Mais alors on a $\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} = -\frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -\frac{\beta}{\alpha}$, d'où la thèse. Si les droites AA', BB', CC' sont parallèles, ? alors par le théorème de Thalès, on a $\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = \frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CB}}$? et $\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BA'}}$ et donc $\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} = \frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CB}}\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BA'}} = -1$ (parce que tous les vecteurs considérés dans la dernière équation sont colinéaires).

Réciproquement si on a A', B', C' comme dans l'énoncé et on sait que $\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} = -1$ alors il y a deux possibilités : si $AA' // BB' // CC'$ il n'y a rien à prouver. Autrement soit $M = AA' \cap BB'$ (à moins de changer les noms nous pouvons supposer que cette intersection soit non vide) et soit $N = CM \cap AB$. Alors par le point précédent, on a $\frac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{NB}} \overset{?}{=} -\left(\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}}\right)^{-1} = \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}$, mais alors $N = C'$ et donc aussi CC' passe par M. $\boxed{9.15}$

9.3 Exercices

Exercice 106 (Droite affine en $\mathbb{R}^2$ par un point fixé et dirigée par un vecteur donné). *Soit $\vec{v} = (v_x, v_y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Écrire l'équation de la droite affine qui passe par un point $O = (O_x, O_y)$ et qui est dirigée par $\vec{v}$.*

soit $\overrightarrow{O\Pi} = \vec{v}$ $\quad \Pi' \in \mathcal{M} \iff H_{O,\lambda}(\Pi) = \Pi'$, $\Pi' = \lambda\overrightarrow{O\Pi} + \Pi$ $\quad$ donc $\begin{cases} x = \lambda \vec{v}_x + \vec{v}_x \\ y = \lambda \vec{v}_y + \vec{v}_y \end{cases} \Rightarrow x v_y = y v_x \Rightarrow y = \frac{v_y}{v_x} x$